768. 確率法則ノ分解問題, IX

北川　敏男（阪大）

§10. $I[F]$ =於ケル分解問題

L'arithmétique des produits de lois de Poisson ノ重要ナ定理トシテ

定理 10. (Raikoff) Poisson ノ分布ノ特性函数 $e^{e^{it}-1}$ ヲバ, 二ツノ特性函数 $f_1(t)$, $f_2(t)$ ノ積ニ分解出来タトスル。然ル時ニハ, $f_1(t)$, $f_2(t)$ ハ必ズ次ノ形ニナル:

$$(1)\quad \begin{cases} f_1(t)=e^{c_1(e^{it}-1)+imt} \\ f_2(t)=e^{c_2(e^{it}-1)-imt} \end{cases} \qquad (-\infty<t<\infty)$$

而シテ茲ニ、実数 c_1, c_2, m ニ関シテハ次ノ関係ガ充サレテ居ルコトニナル:

$$(2)\quad c_1+c_2=1,\quad c_1,\ c_2\geqq 0.$$

茲デモコノ定理ヲモ亦, 或ル特殊領域ニ於ケル分解問題トシテ眺メテ見ヨウ。

以下ニ於テハ暫ラク、$f(t)\neq 0$ $(-\infty<t<\infty)$ ナル如キ特性函数 $f(t)$ ノミヲ考ヘル。カヽルモノニ對シテハ $\log f(0)=1$ ナル條件ニ依リ unique ニキマツタ分枝ニヨツテ $\log f(t)$ ノ價ヲ一意的ニキメタ、$f(t)=\exp\{\log f(t)\}$ ト書ケル。

然ルトキ

(3) $\quad exp\{\alpha \log f(t)\}$ $\quad (\equiv f_\alpha(t)$ トモ略記スル)

ハ，或ル正ノ実数 α ニ對シテハ特性函数ヲ表ハシ，或ル正ノ実數 α ニ対シテハ特性函数ヲバ表ハサナイ。前者ノ如キ α スベテノ集合ヲ假リニ Ξ_f デ表ハサウ：即チ、$\mathcal{K}$ ニ依ツテ凡ベテノ特性函数ノ集合ヲ示スナラバ

(4) $$\Xi_f = \left[\alpha ; exp\left\{\alpha \log f(t)\right\} \in \mathcal{K}\right]$$

Ξ_f ニ関シテ次ノコトハ容易ニ見ラレル。

(5)
- (i) Ξ_f ハ $(0, \infty)$ ニテノ閉集合デアル.
- (ii) Ξ_f が正ノ實数全体ノ集合ト一致スレバ，$f(t)$ ハ無限ニ分解可能ナ確率法則デアル；逆又眞.
- (iii) $\alpha, \beta \in \Xi_f$ ナラバ：$\alpha+\beta \in \Xi_f$.

次ニ $\mathcal{J}\{f\}$ ニ依ツテ

(6) $\quad f_\alpha(t)\, e^{imt} \qquad (\alpha \in \Xi_f,\ -\infty < m < \infty)$

ナル如キ特性函数スベテノ集合ヲ表ハシ、$\mathcal{J}\{f\}$ ニ属スル特性函数ニ対應スル分布函数全部ノ集合ヲバ $I[F]$ デ表ハスノデアル。

以上ヲ準備トシテ、吾々ノ問題ハ，次ノ如ク formulate 出来ルノデアル：

$F(x)$ ヲ分布函数トスル確率法則ヲ $\mathcal{L}$ トスル。$\mathcal{L}$ が，分解サレテ $\mathcal{L}=\mathcal{L}_1\mathcal{L}_2$ トナルトキニハ，—— $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2$ ノ分布函数ヲ $F_1(x), F_2(x)$ トシテ —— 必ズ，$F_1 \in I[F]$，且ツ $F_2 \in I[F]$ デアル様ナ F ハ如何ナルモノカ。

標記的ニ書ケバ上ノ問題ハ：

(ｱ)　$F = F_1 * F_2 \longrightarrow F_1 \in \mathrm{I}[F],\ F_2 \in \mathrm{I}[F]$

ナル如キFヲ求メヨトイフコトデアル。（勿論，F, F_1, F_2ハ分布函数）

以上ノ如キ見方カラスレバ，定理10ハコレヲ次ノ如ク書ケル：

定理10′：　$F(x)$ガ Poisson ノ分布（即チ $e^{e^{it}-1}$ ナル特性函数ニ対応スル分布函数）トスレバ，(ｱ)ナル関係ガ成立スル。

カク観察シ来ルトキ、Raikoff ノ定理ノ位地ガ次ノ関係ニアルノヲ見ル：

$\mathrm{K}[F]$ ニ於ケル分解問題	$\mathrm{I}[F]$ ニ於ケル分解問題
Gauss ノ分布ニ関スル Cramér ノ定理（定理9, V）	Poisson ノ分布ニ関スル Raikoff ノ定理（定理10）

$\mathrm{K}[F]$ ト $\mathrm{I}[F]$ トノ対応ヲ更ニ追求スルトキ，$\mathrm{I}[F]$ ニ関シテ幾多ノ問題ガ派生スルノヲ見ルデアロウ。シカシ，ソウイッタ方面ニ於テ、未ダ研究ハ進ンデ居ラナイト思フ。茲ニ将来ノ発展ガ期待サレル。

定理10ニ対スル Khintchine ノ証明：

先ヅ証明ニ用ヰラレル補助定理ヲ挙ゲテ置カウ。

補助定理A：　確率変数 U, V ハ相互ニ独立デ、$\mathrm{U} + \mathrm{V} = \mathrm{X}$ ナリトスル。U, V, X ノ分布函数ヲ夫々，$F(x)$, $G(x)$, $H(x)$ デ表ハス。然ルトキニハ，若シモ $F(x)$ ガ $-\infty < x < \infty$ ニテ到ル所連続デアルナラバ，$H(x)$ モ

応然リ。

〔證〕 次ノ不等式カラ明ラカデアル：任意ノ実数x，任意ノ正数εニ對シテ

$$H(x+\varepsilon)-H(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\{F(x+\varepsilon-y)-F(x-y)\}dG(y)$$

$$\leqq \underset{-\infty<y<\infty}{l.u.b.}|F(x+\varepsilon-y)-F(x-y)|$$

<u>補助定理B：</u> 確率変数U，Vハ相互ニ独立デ，U+V＝Xナリトスル。Xノ分布函数$H(x)$ハ，0及ビ自然数ニ於テノミ飛躍ヲモツ階段函数ナリトスル。然ルトキニハ，実数mガ存在シテ、U＋m，V＋mノ分布函数ガ共ニ0及ビ自然数ニ於テノミ，飛躍ヲモチ得ル階段函数トナル。

〔証〕 U，Vノ分布函数ヲ夫々$F(x)$，$G(x)$トスル。$F(x)$ヲ連続部分$C_F(x)$，不連続部分$S_F(x)$ニ分ツ：即チ $F(x)=S_F(x)+C_F(x)$．同様ニシテ、$G(x)=S_G(x)+C_G(x)$．然ルトキニハ

$$\int_{-\infty}^{\infty}F(x-y)\,dG(y)=\int_{-\infty}^{\infty}S_F(x-y)\,dS_G(y)+\int_{-\infty}^{\infty}C_F(x-y)\,dS_G(y)$$

$$+\int_{-\infty}^{\infty}S_F(x-y)\,dC_G(y)+\int_{-\infty}^{\infty}C_F(x-y)\,dC_G(y)$$

茲ニ、右辺ノ第二項，第四項ハ補助定理Aニヨリ各xノ連続函数デアル。（S，Cハ必ズシモ分布函数トハナラヌカモ知レナイガ、有界且ツ単調増加デアルコトハ明ラカデアル。補助定理Aノ証明デ必要ナノハソノ事ノミデアッタ）。第三

項ハ $S_F * C_G$ デアルガ、コレハ $C_G * S_F$（即テ $\int_{-\infty}^{\infty} C_G(x-y)\,dS_F(y)$ ト書ク）ニ等シイノデアルカラ、コレヌ x ノ連続函数デアル。コレラ三項ハ又 x ノ単調増加函数デアルコトモ明ラカデアル。依ッテ結局

$$
\begin{cases}
C_H(x) = \int_{-\infty}^{\infty} C_F(x-y)\,dS_G(y) + \int_{-\infty}^{\infty} S_F(x-y)\,dC_G(y) \\
\qquad + \int_{-\infty}^{\infty} C_F(x-y)\,dC_G(y) \\
S_H(x) = \int_{-\infty}^{\infty} S_F(x-y)\,dS_G(y)
\end{cases}
$$

トナラネバナラヌ事ガミラレル。然ルニ假定ニヨリ、$C_H(x) \equiv 0$ デアル。依ッテ $C_F(x) = C_G(x) \equiv 0$ トナラネバナラヌ。

即チ、<u>$\mathfrak{U}, \mathfrak{V}$ ノ分布函数ハ共ニ階段函数デアルコトヲ知ッタ</u>。次ニ、$\mathfrak{U}$ ノ飛躍点ノ集合，$\mathfrak{V}$ ノ飛躍点ノ集合ハ，共ニ下ニ有界デアル。何者，$\mathfrak{U}+\mathfrak{V}=\mathfrak{X}$ ノ飛躍点ノ集合ガソウデアルカラ（0ガ最小値）依ッテ、$\mathfrak{U}, \mathfrak{V}$ ノ飛躍点ヲ次ノ如ク書キナラベ得ル：

$$\mathfrak{U}:\ a_0 < a_1 < a_2 < \cdots\cdots < a_n < \cdots\cdots$$

$$\mathfrak{V}:\ b_0 < b_1 < b_2 < \cdots\cdots < b_n < \cdots\cdots$$

$\mathfrak{U}+\mathfrak{V}=\mathfrak{X}$ ニ依リ、$a_0 + b_0 = 0$ トナラネバナラヌ。依ッテ $a_0 = -b_0 = -m$ トオク。$a_i = m + c_i$, $b_i = m + d_i$ トオクト，c_i; d_i ハ自然数又ハ 0 デナケレバナラヌ。実数 $a_i + b_0 = -m + c_i + m = c_i$ ヲトル確率ハタシカニ正デアル。依ッテ c_i ハ 0 又ハ自然数デナケレバナラヌ。

〔以上〕

補助定理C：二ツノ特性函数 $f_1(t)$, $f_2(t)$ ノ積 $f(t)$ ガ整函数デアルナラバ，$f_1(t)$, $f_2(t)$ モ亦整函数デアル。又特ニ $f(t)$ ガ 0ニナラヌ整函数ナラバ，$f_1(t)$, $f_2(t)$ モ亦然リ。（前出，Ⅴ，§8，補助定理8及ビ系1）

以上ヲ準備トシテ、目的ノ定理10ヲ証明シヤウ。

定理10ノ証明：$e^{e^{it}-1}$ ヲ特性函数トスル確率変数ヲ $\mathfrak{X}$ トシ，$\mathfrak{X}$ ガ二ツノ相互ニ独立ナ確率変数 $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$ ノ和ニ分解サレタトスル。即チ $\mathfrak{X}=\mathfrak{U}+\mathfrak{V}$. 茲ニ，$\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$ ハ共ニ，或ル常数ニ等シクハナイトスル。$\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$ ノ特性函数ヲ夫々 $f_1(t)$, $f_2(t)$ トスル。即チ $e^{e^{it}-1}=f_1(t)f_2(t)$

$e^{e^{it}-1}$ ハ，0ニナラヌ整函数ナルガ故ニ、補助定理Cニヨリ、$f_1(t)$, $f_2(t)$ 亦ソウデナケレバナラヌ。

$e^{e^{it}-1}$ ヲ特性函数ニモツ $\mathfrak{X}$ ノ分布函数ハ，0及ビ自然数ヲ飛躍点トスル階段函数デアル。依ッテ、補助定理Bニヨリ適當ナ実数 m ヲトルトキ $\mathfrak{U}+m$, $\mathfrak{V}-m$ ノ分布函数モ亦階段函数トナル。ソノ可能ナ飛躍点ハ 0及ビ自然数デアル。

ソコデ $\mathfrak{U}+m$, $\mathfrak{V}-m$ ノ代リニ，以下デハ單ニ夫々 $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$ トカク．即チ一般性ヲ失フコトナシニ $m=0$ ト假定スル。

(8) $\Pr.\{\mathfrak{U}=p\}=\alpha_p$, $\Pr.\{\mathfrak{V}=p\}=\beta_p$

トオクト

(9) $f_1(t)=\sum_{p=0}^{\infty}\alpha_p e^{ipt}$, $f_2(t)=\sum_{p=0}^{\infty}\beta_p e^{ipt}$

依ッテ

$$(10)\quad \Pr.\{X=p\}=\alpha_0\beta_p+\alpha_1\beta_{p-1}+\cdots\cdots+\alpha_p\beta_0 \geqq \alpha_p\beta_0,\ \alpha_0\beta_p.$$

茲ニ $\alpha_0\neq 0$, $\beta_0\neq 0$ ニ注意スル。

然ルニ, $f_1(t)$, $f_2(t)$ ハ共ニ, 0ニナラヌ整函数デアルカラシテ、$\beta_0 f_1(t)=\exp\{p_1(t)\}$, $\alpha_0 f_2(t)=\exp\{p_2(t)\}$ トナル整函数 $p_1(t)$, $p_2(t)$ ガ存在スル。ソコデ今 $e^{it}=\zeta$ トオキ, 更ニ $p_i(t)=q_i(\zeta)$ トカクトキニハ, 結局 (10) ナル関係カラ

$$q_i(\zeta)\ll\zeta-1\quad(i=1,2)\qquad q_1(\zeta)+q_2(\zeta)=\zeta-1$$

トナラネバナラヌ。コノ事カラシテ $q_1(\zeta)=c_1\zeta+d_1$, $q_2(\zeta)=c_2\zeta+d_2$, $c_1+c_2=1$, $c_1, c_2>0$, $d_1+d_2=1$ トナラネバナラヌ。ソコデ結局、$f_1(t)=\exp\{c_1e^{it}+h_1\}$, $f_2(t)=\exp\{c_2e^{it}+h_2\}$ トナリ、$f_1(0)=f_2(0)=1$ トナルコトカラ、$h_1=-c_1$, $h_2=-c_2$ トナル。即チ $f_i(t)=\exp\{c_i(e^{it}-1)\}$, $c_1+c_2=1$, $c_1, c_2>0$ トナル。同時ニ $m=0$ トシタコトヲ想起スレバ, コレ証明セントシタ定理10ノ結論ニ外ナラヌ事ヲ知ル。〔以上〕